Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства

Автор:
Леонард Млодинов

Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства

Леонард Млодинов

Мы привыкли воспринимать как должное два важнейших природных умений человека – воображение и абстрактное мышление, а зря: «Евклидово окно» рассказывает нам, как происходила эволюция нашей способности представлять то, чего мы не видим воочию. Эта книга – восхитительная смесь научного авторитетного труда и веселого балагурства, она превращает классические теории и понятия геометрии в доступные, поражающие воображение истории. Спасибо Млодинову: не нужно быть математиком или физиком, чтобы постичь загадки пространства и поразиться великолепию мироустройства.

Леонард Млодинов

Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства

Алексею и Николаю, Саймону и Ирэн

Введение

Двадцать четыре века назад один грек стоял у берега моря и смотрел, как исчезают вдали корабли. Аристотель, судя по всему, проводил за таким тихим занятием немало времени и повидал немало кораблей, раз его однажды посетила интересная мысль. Все корабли исчезали одинаково – сначала корпус, потом мачты и паруса. Он задумался: как такое может быть? На плоской Земле корабли должны были уменьшиться целиком и исчезнуть, превратившись в нераспознаваемую точку. Но корпус исчезал первым, а уж потом все остальное – и это подтолкнуло Аристотеля к подлинному озарению: Земля – искривлена. Аристотель взглянул на общее устройство нашей планеты через окно геометрии.

Ныне мы исследуем космос так же, как тысячелетия назад познавали Землю. Кое-кто слетал на Луну. Непилотируемые летательные аппараты добирались до границ Солнечной системы. Вполне возможно, уже в этом тысячелетии мы долетим до ближайшей звезды – это странствие с достижимой когда-нибудь-скоростью в одну десятую скорости света займет лет пятьдесят. Но даже если мерить расстояниями до альфы Центавра, задворки Вселенной отсюда – в нескольких миллиардах таких «мерных реек». Вряд ли нам доведется узреть, как корабль достигает горизонта Вселенной, подобно увиденному Аристотелем на Земле. И все-таки мы узнали о природе и устройстве Вселенной многое, как некогда и Аристотель, – наблюдая, применяя логику и страшно долго вперяя взоры в космос. Веками горизонты для нас раздвигали гений и геометрия. Что можно вообще доказать о пространстве? Как узнать, где находишься? А может ли пространство искривляться? Сколько в нем измерений? Как геометрия объясняет естественный порядок и единство космоса? Эти вопросы и стоят за пятью геометрическими революциями в мировой истории.

А началось все со скромной схемы, придуманной Пифагором: применить математику как абстрактную систему правил, по которым можно смоделировать физическую вселенную. Следом возникла концепция пространства, отделенного от земли, по которой мы ходим, или воды, в которой плаваем. То было рождение абстракции и доказательства. Вскоре греки, похоже, научились находить геометрические ответы на любой научный вопрос – от принципов действия рычага до орбит небесных тел. Однако греческая цивилизация пришла в упадок, и Запад завоевали римляне. Однажды – аккурат перед Пасхой 415 года – толпа невежд стащила одну женщину с колесницы и убила. Женщина эта была последним ученым, преданным геометрии, Пифагору и рациональной мысли, она последняя трудилась в Александрийской библиотеке, и с этой смертью цивилизация начала соскальзывать в тысячелетие Темных веков.

Однако цивилизация воскресла, а с нею – и геометрия, но уже совсем другая, новая. Ее принес человек весьма цивилизованный – ему нравилось играть в азартные игры, спать до обеда и критиковать греков: их метод геометрического доказательства виделся ему чересчур обременительным. Для облегчения умственного труда Рене Декарт поженил геометрию и числа. Благодаря его идее координат, пространства и формы можно было крутить и вертеть, как никогда прежде, а число получалось визуализировать геометрически. Эти методики породили математический анализ и создали условия для развития современных технологий. Благодаря Декарту геометрические понятия координат и графиков, синусов и косинусов, векторов и тензоров, углов и кривизны присутствуют ныне в любом физическом контексте – от электроники твердого тела до огромных структур в пространстве-времени, от технологии транзисторов и компьютеров до лазеров и космических полетов. Однако работы Декарта взрастили и более абстрактную – и революционную – идею: искривленное пространство. Действительно ли сумма углов в треугольнике равна 180°, или это верно лишь для треугольников на плоскости листа бумаги? И дело тут не только в оригами. Математика искривленного пространства произвела революцию на уровне основ логики не в одной лишь геометрии, но во всей математике. Она создала предпосылки к рождению теории относительности Эйнштейна. Его геометрическая теория пространства и дополнительного измерения – времени, – а также связи между пространством-временем, материей и энергией изменила саму парадигму мышления настолько масштабно, насколько это удалось в свое время лишь Ньютону. Она, безусловно, представлялась вполне радикальной. Но и это, как выяснилось, ничто по сравнению с недавней революцией.

Как-то в июне 1984 года один ученый заявил, что он-де осуществил прорыв в теории, с помощью которой можно объяснить что угодно – от существования субатомных частиц и их взаимодействий до устройства пространства-времени и природы черных дыр. Этот человек считал, что ключ к пониманию единства и порядка во Вселенной – в геометрии, причем геометрии новой и довольно причудливой. Его вывела с трибуны группа людей в белой спецодежде.

Потом выяснилось, что все это было подстроено. Но общая мысль и устремление гения – подлинные. Джон Шварц полтора десятка лет трудился над теорией под названием «струнная», и на нее большинство физиков реагировало так же, как отнеслись бы к уличному психу, просящему денег. Ныне большинство физиков верит, что теория струн верна: геометрия пространства отвечает за физические законы, управляющие всем, что есть в этом пространстве.

Манифест исторической революции в геометрии был написан Евклидом – человеком-загадкой. Если у вас в голове мало что осталось от убийственного предмета под названием «евклидова геометрия» – вероятнее всего, это потому, что вы его весь проспали. Смотреть на геометрию тем манером, какой нам обычно предлагают, – верный способ превращения юных умов в камень. Но евклидова геометрия на самом деле – увлекательный предмет, а труд Евклида – великолепие, чье значение сопоставимо с важностью Библии, а идеи – не менее радикальны, чем марксовы и энгельсовы. Ибо труд Евклида «Начала» открыл окно, в котором нам была явлена природа Вселенной. Его геометрия претерпела четыре революции, ученые и математики подорвали верования теологов, разрушили столь дорогие философам представления о мире и заставили нас пересмотреть и перевообразить наше место в мирозданье. Эти революции, а также их пророки и истории за ними – предмет данной книги.

Часть I. История Евклида

Что вам известно о пространстве?

Как геометрия начала описывать Вселенную и возвестила зарю современной цивилизации.

Глава 1. Первая революция

Евклид, вероятно, лично не открыл ни одного существенного закона геометрии. Тем не менее он – самый знаменитый геометр в истории, и не просто так: тысячелетиями именно в его окне люди впервые видели геометрию. Он и поныне – лицо первой великой революции в представлениях о пространстве: рождения абстракции, понятия о доказательстве.

Постижение пространства началось, что вполне естественно, с представлений о месте – нашем месте, т. е. о Земле. Все началось с развития «измерений земли», как это называли египтяне и вавилоняне. Греческое название того же самого – «геометрия», однако предметы этих занятий совсем не похожи. Греки первыми осознали, что природу можно постичь, применив математику, а геометрия может не только описывать, но и объяснять. Развивая геометрию от простых описаний камня и песка, греки извлекли понятия точки, линии и плоскости. Отбросив вуали материи, они обнаружили структуру такой красоты, какой человечество еще не видело. Евклид стоит как раз на пике борьбы за изобретение математики. История Евклида есть история революции, история аксиомы, теоремы, доказательства – и рождения разума как такового.

Глава 2. Геометрия налогов

Корни достижений греков уходят в древние цивилизации Вавилона и Египта. Йейтс писал[1 - О равнодушии вавилонян к знанию ирландский поэт и драматург Уильям Батлер Йейтс (1865–1939) написал в своем стихотворении «Заря», начинающемся так:Я был бы невеждой, как та заря,Что сверху вниз глядела, зря,Как меряет город жена царяИглой от броши своей,Иль на дряблых людей, что взиралиИз мелочного ВавилонаНа беспечность планет и пути ихИ таянье звезд от взошедшей луны,А сами в скрижали суммы писали…Здесь и далее прим. автора, кроме оговоренных особо.] о вавилонском равнодушии – особенности, из-за которой вавилонянам не удалось достичь величия в математике. До греков человечество приметило немало хитрых формул, расчетных и инженерных фокусов, однако – в точности как наши политики – люди временами добивались поразительных успехов с феноменально малым разумением, что же они вообще сделали. А им-то что? Они были строителями, что работают впотьмах на ощупь – что-то возводят, где-то укладывают ступени и достигают своих целей, но не понимания.

И не они первые. Люди считали и вычисляли, драли налоги и облапошивали друг друга с незапамятных времен. Некоторые предположительно счетные орудия датируются 30 000 лет до н. э. – всего лишь палки, расписанные художниками с интуитивным математическим чутьем. Но есть и поразительно отличные приспособления. На берегах озера Эдвард (ныне Демократическая Республика Конго) археологи выкопали небольшую кость 8000-летней давности с крошечным кусочком кварца, вделанным в углубление на одном конце. Автор этого приспособления – художник или математик, мы никогда уже не узнаем, – вырезал на кости три колонки насечек. Ученые считают, что эта кость, названная костью Ишанго[2 - Michael Williams, A History of Computing Technology (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985), стр. 39–40.], – возможно, самый древний из найденных прибор для численной записи.

Мысль об осуществлении операций с числами[3 - Интересно о происхождении счета и арифметики у Уильямза, гл. 1.] доходила гораздо медленнее, поскольку занятия арифметикой подразумевают некоторую степень абстракции. Антропологи сообщают: если два охотника выпустили две стрелы, завалили двух газелей и заработали две грыжи, волоча добычу к стоянке, во многих племенах все эти «два» и «две» могли быть разными понятиями в каждом случае[4 - Williams, стр. 3.]. В таких цивилизациях нельзя было складывать яблоки с апельсинами. Похоже, на понимание того, что все это частные случаи одного и того же понятия – абстрактного числа 2, – потребовались тысячи лет.

Первые серьезные шаги в этом постижении люди предприняли в шестом тысячелетии до н. э., когда жители долины Нила постепенно отказались от кочевой жизни и принялись культивировать земли в долине[5 - R. G. W. Anderson, The British Museum (London: British Museum Press, 1997), стр. 16.]. Пустыни Северной Африки – едва ли не самые сухие и бесплодные в мире. И лишь река Нил[6 - Pierre Montet, Eternal Egypt, trans. Doreen Weightman (New York: New American Library, 1964), стр. 1–8.], набухая от экваториальных дождей и тающих снегов Абиссинского нагорья, могла принести, подобно богу, жизнь и пропитание в пустыню. В древние времена каждый год в середине июня сухая, безрадостная и пыльная долина Нила чуяла, как могучие воды устремляются в русло реки, занося плодородным илом округу. Задолго до греческого классика Геродота, описавшего Египет как «дар Нила», Рамзес III оставил запись, указывающую на то, как египтяне почитали этого бога, Нил: они называли его Хапи и подносили ему мед, вино, золото и бирюзу – все самое ценное. Само название страны – Египет – означает на коптском «черная земля»[7 - Alfred Hooper, Makers of Mathematics (New York: Random House, 1948), стр. 32.].

* * *

Ежегодное затопление долины продолжалось четыре месяца. К октябрю река начинала мелеть и чахнуть, пока земля к следующему лету не высыхала до корки. Восемь засушливых месяцев делились на два сезона: возделывания почв, перит, и сбора урожая, шему. У египтян возникли оседлые общины, располагавшиеся на холмах, которые в периоды затопления превращались в островки, соединенные дамбами. Египтяне создали систему орошения и хранения зерна. Сельское хозяйство стало основой египетского календаря и самой жизни, а его главными продуктами – хлеб и пиво. К 3500 году до н. э. египтяне развили кое-какое производство – ремесла и металлургию. Примерно тогда же они разработали и письменность[8 - Georges Jean, Writing: The Story of Alphabets and Scripts, trans. Jenny Oates (New York: Harry N. Abrams, 1992), стр. 27.].

Смерть для египтян всегда была неизбежностью, но с достатком и оседлостью неизбежными стали и налоги. Вероятно, именно они первыми потребовали развития геометрии[9 - Геродот писал, что развитие египетской геометрии стимулировали задачи налогообложения. См.: W. K. C. Guthrie, A History of Greek Phulosophy (Cambridge, UK: University Press, 1971), стр. 34–35, и Herbert Turnbull, The Great Mathematicians (New York: New York University Press, 1961), стр. 1.]: хоть фараон и владел, в принципе, всеми землями и богатствами, на самом деле частная собственность была и у храмов, и у отдельных частных лиц. Власти оценивали размеры налогов по высоте подъема воды в текущем году и размерам частных владений. Тех, кто отказывался платить, тогдашняя полиция могла уговорить силой, не сходя с места. Займы существовали, но интерес закладывали по принципу «чем проще, тем лучше»: 100 % годовых[10 - Rosalie David, Handbook of Life in Ancient Egypt (New York: Facts on File, 1998), стр. 96.]. Поскольку средства на кону стояли нешуточные, египтяне выработали более-менее надежные, хоть и мучительные методики расчетов площадей квадрата, прямоугольника и трапеции. Для вычисления площади круга его аппроксимировали квадратом со сторонами, равными восьми девятым диаметра. Это примерно то же самое, что

/

– или 3,16 – для значения числа л, т. е. завышенная его оценка – правда, всего на 0,6 %. История не сохранила свидетельств, бурчали налогоплательщики по поводу такой несправедливости или нет.

Египтяне применяли свои математические знания с поразительным размахом. Вообразите открытую всем ветрам унылую пустыню в 2580 году до н. э. Архитектор разложил свои папирусы с планом заказанной вами постройки. У него-то работа непыльная: квадратное основание, треугольные грани, ну и да – 480 футов в высоту, из каменных глыб по две с лишним тонны каждая. Вам поручили проследить за строительством. Простите-извините, но никаких лазерных дальномеров и прочих затейливых маркшейдерских приборов нету – кое-какие палки да веревки.

Многие домовладельцы знают: разметка земли под фундамент здания или даже периметра под простенькую террасу при помощи лишь плотницкого угольника и рулетки – задачка непростая. При постройке же такой пирамиды малейшее отклонение от правильных углов – и тысячи тонн камней тысячи человеко-лет спустя в сотнях футов над землей примут форму не строгих треугольных граней пирамиды, сходящихся в одной точке, а шаткой четырехглавой кучи. А фараоны, коим поклонялись как богам, с армиями, резавшими фаллосы убитым врагам[11 - Эти и другие поразительные факты можно найти благодаря вкладу Алексея в эти примечания – вот где: James Putnam and Jeremy Pemberton, Amazing Facts about Ancient Egypt (London and New York: Thames & Hudson, 1995), стр. 46.] просто для точности подсчетов, – совсем не те всесильные божества, которым стоит предъявлять кособокие пирамиды. Прикладная египетская геометрия развилась в полноценный предмет.

Чтобы строительство шло по плану, египтяне подключали специалиста, называвшегося гарпедонаптом, буквально – «натягивателем веревок». Во зиться с веревкой гарпедонапт привлекал трех рабов. На ней с определенными интервалами были завязаны узлы, и если ее туго натянуть, получался треугольник с узлами-вершинами и сторонами известной длины – и, соответственно, углами нужного раствора. Например, если натянуть веревку с узлами на 30-м, 40-м и 50-м ярдах, между сторонами в 30 и 40 ярдов получится прямой угол. (Слово «гипотенуза» по-гречески исходно означала «растянутая напротив».) Метод, как выяснилось, блестящий – и куда сложнее, чем может показаться. В наше время сказали бы, что натягиватели веревок строили не линии, а геодезические кривые вдоль поверхности Земли. Нам предстоит убедиться, что именно этим методом – хоть и не в таком умозрительном виде и не в таких малых (бесконечно малых, говоря строго) масштабах – мы и поныне пользуемся для оценки локальных свойств пространства в той области математики, что зовется «дифференциальная геометрия». Именно теоремой Пифагора мы поверяем плоскость пространства.

Покуда египтяне обживали долину Нила, в районе Персидского залива и Палестины развивалась еще одна конурбация[12 - Хороший обзор вавилонской и шумерской математики см.: Edna E. Kramer, The Nature and Growth of Modern Mathematics (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1981), стр. 2–12.]. Все началось в Месопотамии – области между реками Тигр и Евфрат – в четвертом тысячелетии до н. э. Где-то в промежутке от 2000 до 1700 года до н. э. несемитские племена, обитавшие к северу от Персидского залива, завоевали своих южных соседей. Их победоносный владыка Хаммурапи назвал объединенное царство по имени своего города – Вавилона. Вавилонян мы и считаем[13 - Для сравнения египетской и вавилонской математик см.: Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (New York: Oxford University Press, 1972), стр. 11–22. См. Также: H. L. Resnikoff and R. O. Wells, Jr., Mathematics in Civilization (New York: Dover Publications, 1973), стр. 69–89.] создателями математической системы, что гораздо сложнее египетской.

Инопланетяне, глядящие на Землю в какой-нибудь сверхтелескоп с расстояния в 23 400 000 000 000 000 миль, и сегодня могут наблюдать жизнь и привычки вавилонян и египтян. Для нас же, застрявших на этой планете, собрать полную картину той жизни будет потруднее. О египетской математике мы знаем в основном из двух источников – из «Папируса Ринда», названного в честь Александра Г. Ринда[14 - Также известен как «папирус Ахмеса»; Александр Генри Ринд (Райнд, 1833–1863) – шотландский юрист и египтолог. – Прим. пер.], передавшего этот документ в Британский музей, и из «Московского папируса», находящегося в Музее изобразительных искусств в Москве. Наши знания о вавилонянах происходят из раскопок руин в Ниневии, где обнаружили около 1500 табличек. К сожалению, ни на одной не нашлось математических текстов.

Зато несколько сотен глиняных табличек удалось накопать в Ассирии – в основном на руинах Ниппура и Киша[15 - Resnikoff and Wells, стр. 69.]. Если сравнивать археологические раскопки с поисками в книжном магазине, на сей раз отдел математики в нем обнаружился. Археологи нашли справочные таблицы, учебники и другие объекты, поведавшие многое о вавилонской математической мысли.

Стало известно, к примеру, что функции вавилонского эквивалента инженера не сводились к мобилизации рабочей силы для стройки. Чтобы вырыть, допустим, канал, этот специалист размечал его трапециевидное сечение, рассчитывал объем земли, который необходимо вынуть, прикидывал, сколько один человек прокопает за день, и выдавал количество человекодней, необходимое для осуществления замысла. Вавилонские ростовщики умели даже вычислять сложный процент доходности[16 - Kline, стр. 11.].

Вавилоняне уравнений писать не умели. Все их расчеты выражались словесными задачами. Например, одна из табличек содержала восхитительный текст: «Четыре есть длина и пять есть диагональ. Какова ширина? Размер ее неведом. Четыре раза по четыре есть шестнадцать. Пять раз по пять есть двадцать пять. Вынимаем шестнадцать из двадцати пяти, остается девять. Сколько раз мне взять, чтобы получилось девять? Три раза по три есть девять. Три есть ширина»[17 - Цит. по: The First Mathematicians (март, 2000); сходная, но более сложная риторическая задача есть у Клайна, стр. 9.]. Ныне мы бы записали так: «x

= 5

– 4

». Недостаток словесной постановки задач – не столько в очевидной громоздкости, сколько в том, что с прозой не получается обращаться так же, как с уравнением, да и правила алгебры применять не так-то просто. На преодоление этого недостатка ушли тысячи лет: старейшее известное использование символа «плюс» появляется в одном немецком манускрипте 1481 года[18 - Kline, стр. 259.].

Приведенная выдержка показывает, что вавилонянам была известна теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Уловка с веревками говорит нам о том, что и египтяне, похоже, знали это соотношение, однако вавилонские писцы испещрили свои глиняные документы впечатляющими таблицами троек, иллюстрирующих эту зависимость. Они записали не только малые тройки – 3, 4, 5 или 5, 12, 13, но и большие – к примеру, 3456, 3367, 4825. Вероятность обнаружить такую тройку путем случайного перебора разных сочетаний чисел по три невелика. Первая дюжина чисел – 1, 2…, 12 – дает сотни разных комбинаций по три, однако лишь 3, 4, 5 удовлетворяет условиям теоремы. Если только вавилоняне не подрядили армию счетоводов, проведших всю жизнь за вычислениями, можно заключить, что о простой теории чисел им было известно достаточно, чтобы выписать эти тройки.

Несмотря на достижения египтян и сообразительность вавилонян, их вклад в математику свелся к обеспечению греков собранием проверенных математических фактов и общих правил. Они действовали подобно полевым исследователям, трудолюбиво описывающим разные биологические виды, а не современным генетикам, стремящимся понять, как же организмы развиваются и функционируют. Например, хоть обе цивилизации и знали теорему Пифагора, ни та, ни другая не вдумалась в общую закономерность, которую мы сегодня записываем как a

+ b

= c

(где c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника, a и b – длины двух других сторон). Они, похоже, никогда не задавались вопросом, почему такое соотношение вообще существует или как его применить, чтобы получить большее знание. Точное ли это соотношение или приблизительное? В принципе, этот вопрос – ключевой. Но с практической точки зрения – кому какое дело? Пока не появились древние греки, никому никакого дела и не было.

Вообразите задачу, ставшую главной головной болью в геометрии Древней Греции, но никак не волновавшую ни египтян, ни вавилонян, – она замечательно проста. Возьмем квадрат с длиной стороны в одну единицу – какова будет длина его диагонали? Вавилоняне рассчитали это значение как 1,4142129 (в десятичной записи). Этот ответ верен до третьего шестидесятеричного знака после запятой (вавилоняне применяли шестидесятеричную систему счисления). Греки-пифагорейцы додумались, что это число нельзя записать как целое или дробь – для нас, ныне живущих, это означает, что число записывается в виде бесконечной вереницы десятичных знаков без всякой закономерности: 1,414213562… Для греков это оказалось ударом, кризисом религиозных масштабов, из-за которого убили как минимум одного ученого – за то, что поднял визг о значении квадратного корня из двух. Но с чего бы? Ответ – в сути величия греков.

Глава 3. Средь семи мудрецов

Открытие того, что математика – нечто большее[19 - О жизни и работе Фалеса см.: Sir Thomas Heath, A History of Greek Mathematics (New York: Dover Publications, 1981), стр. 118–149; Jonathan Barnes, The Presocratic Philosophers (London: Routledge & Kegan Paul, 1982), стр. 1–16; George Johnston Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid (Dublin, 1889), стр. 7–17; G. S. Kirk and J. E. Raven, The Presocratic Philosophers (Cambridge, UK: University Press, 1957), стр. 74–98; Hooper, стр. 27–38; Guthrie, стр. 39–71.], нежели алгоритмы расчетов объемов грунта или размеров налогов, принадлежит одинокому греческому купцу, ставшему философом; его звали Фалес, и свершилось это открытие 2500 лет назад. Именно Фалес создал возможность для великих открытий пифагорейцев и, в итоге, написания самих «Начал» Евклида. Он жил во времена, когда по всему миру вдруг так или иначе зазвонили будильники, и человеческий разум проснулся. В Индии рожденный примерно в 560 году до н. э. Сиддхартха Гаутама Будда начал распространение буддизма. В Китае Лао-цзы и его более юный современник Конфуций, появившийся на свет в 551 году до н. э., совершили прорыв в мышлении – с колоссальными последствиями. В Греции же начался Золотой век.

У западного побережья Малой Азии река Меандр, от названия которой происходит слово meander[20 - Meander (англ.) – изгиб, извилина, излучина, поворот. – Прим. пер.], разливается на унылую заболоченную равнину, которая ныне – часть Турции. Посреди этого болота примерно 2500 лет назад стоял Милет – самый процветающий греческий город того времени. Тогда он был портовым центром Ионии и располагался у залива, ныне забитого илом. Милет был отрезан от остальных земель водой и горами, и всего один путь вел вглубь материка, зато на море имелось целых четыре гавани, и поэтому город стал сердцем морской торговли на всем востоке Эгейского моря. Отсюда, лавируя меж островов и мысов, корабли пробирались на юг – к Кипру, Финикии и Египту, или отправлялись на запад – в европейскую часть Греции.

В этом городе в VII веке до н. э. началась революция человеческой мысли, мятеж против предрассудков и небрежных суждений; длилась она почти тысячелетие и создала основы современного мышления.

Наше знание об этих мыслителях-революционерах смутно и зачастую основано на предубежденных свидетельствах поздних ученых – Аристотеля, Платона – и временами противоречивых пересказах. Большинство этих легендарных героев носили греческие имена, но греческую мифологию не принимали. Их преследовали, ссылали, доводили до самоубийства – во всяком случае, согласно дошедшим до нас историям.

Невзирая на все эти кривотолки, существует согласие в том, что в Милете примерно в 640 году до н. э. гордые родители произвели на свет мальчика по имени Фалес. Фалес Милетский славен тем, что чаще прочих называется первым в мире ученым или математиком. Столь древняя дата, присвоенная этим профессиям, никак не угрожает первенству профессии древнейшей – сексуальному предпринимательству, поскольку Милет славился конструкциями из набитой кожи, изобретенными для сексуального удовлетворения женщин[21 - Reay Tannahill, Sex in History (Scarborough House, 1992), стр. 98–99.]. Нам неведомо, торговал ли Фалес этими штуками, засоленной рыбой, шерстью или другими милетскими товарами, но был он состоятельным купцом, деньгами распоряжался в свое удовольствие и, отойдя от дел, взялся постигать знания и странствовать.

Древняя Греция состояла из множества маленьких политически независимых областей, или городов-государств, – частью демократических, частью управляемых аристократами или тиранами. О повседневной жизни греков мы знаем в основном применительно к Афинам, но житье у граждан разных краев Эллады имело много общего и за несколько столетий после Фалеса мало изменилось – за вычетом голодных или военных лет. Грекам, судя по всему, нравилось светски проводить время – в цирюльнях, храмах, на рынках. Сократ обожал обувную лавку. Диоген Лаэртский писал о сапожнике по имени Симон, который первым представил сократовы диалоги в виде разговора. На руинах мастерской V века до н. э. археологи обнаружили осколок винной чаши с именем

«Симон»[22 - Richard Hibler, Life and Learning in Ancient Athens (Lanham, MD: University Press of America, 1988), стр. 21.].

Древним грекам нравились и званые ужины. За афинским ужином следовал симпосий – буквально «совместное питие». Бражники, хлебая разбавленное вино, обсуждали философию, пели песни, пересказывали анекдоты и играли в шарады. Не преуспевших в разгадывании шарад или болтавших ерунду ожидало наказание – плясать нагишом по зале, например. Увеселения греков смахивают на студенческие, это верно, однако такова же была и их сосредоточенность на постижении. Греки ценили пытливость.

Фалес, судя по всему, как и многие греки Золотого века, обладал неутолимой жаждой знаний. Посещая Вавилон, он впитывал учение и математику астрономии – и прославился тем, что привез это знание в Грецию. Одно из легендарных достижений Фалеса – предсказание солнечного затмения 585 года до н. э. Геродот сообщает, что оно произошло в разгар битвы[23 - 28 мая 585 года до н. э. по современному летоисчислению; битва между лидийцами и мидянами. – Прим. пер.], и благодаря ему сражение прекратилось и воцарился долгий мир.

Фалес подолгу бывал и в Египте. Египтяне владели секретом постройки пирамид, однако им не хватало понимания, необходимого для измерения их высоты. Фалес искал теоретические объяснения фактов, открытых египтянами эмпирически. Обретя это понимание, Фалес мог вывести геометрические методы один из другого, либо овладеть решением одной задачи, зная решение другой, потому что извлек абстрактную суть из определенного практического приложения. Он поразил египтян демонстрацией метода измерения высоты пирамид[24 - Hooper, стр. 37.], применив все те же знания свойств подобных треугольников. Позднее Фалес использовал сходную технологию для измерения морского пути корабля. В Древнем Египте он стал знаменитостью.

В Греции Фалес был признан современниками одним из Семи мудрецов – семи умнейших людей на свете. Его деяния впечатляют еще больше, если учесть примитивнейший уровень математического знания у среднего человека того времени. Например, семью веками позже великий греческий мыслитель Эпикур по-прежнему считал[25 - Erwin Schroedinger, Nature and the Greeks (Cambridge: Cambridge University Press, 1996), стр. 81.], что солнце – не такой уж громадный огненный шар, а «как раз такой, каким мы его наблюдаем».

Фалес сделал первые шаги по систематизации геометрии. Он первым доказал геометрические теоремы, подобные тем, что Евклид века спустя собрал в «Началах». Осознав необходимость неких правил, из которых можно обоснованно делать дальнейшие выводы, Фалес изобрел первую систему логического мышления. Он первым осмыслил понятие о сравнимости пространственных фигур: две фигуры на плоскости можно считать равными, если можно так сдвинуть и повернуть одну, чтобы она в точности совпала с другой. Расширение идеи равенства чисел до фигур в пространстве оказалось громадным рывком математизации пространства. Это не так очевидно, как может показаться нам, усвоившим это еще в школьные годы. На самом деле – и мы еще в этом убедимся – такой вывод требует допущения однородности, т. е. что фигура не искажается и не меняется в размерах при движении, а это не так для некоторых пространств, включая наше физическое. Фалес сохранил для своей математики египетское название – «измерение земли»[26 - Hooper, стр. 33.], – однако перевел его на родной язык, и получилась «геометрия».

Фалес утверждал, что наблюдение и рассуждение могут объяснить все происходящее в природе. В конце концов он даже пришел к революционному заключению, что природа подчиняется неизменным законам. Удары грома – не вопли сердитого Зевса. Наверняка же существует объяснение получше, вытекающее из наблюдения и рассуждения. А в математике любые выводы о мире должны быть подтверждены правилами, а не догадкам и наблюдениями.

Фалес размышлял и над понятием физического пространства. Он осознал, что вся материя мира, несмотря на ее разнообразие, должна быть по сути одним и тем же веществом. За полным отсутствием подтверждений такой рывок интуиции совершенно поразителен. Следующий естественно возникший вопрос: а что же это за вещество? Живя в портовом городе[27 - О милетской жизни см.: Adelaide Dunham, The History of Miletus (London: University of London Press, 1915).], Фалес, следуя интуиции, выбрал им воду. Поразительно: ученик и соотечественник Фалеса, милетец Анаксимандр пришел к сопоставимому по мощности интуитивному выводу об эволюции, выбрав низшим животным, от которого произошел человек, рыбу[28 - См.: Guthrie, стр. 55–80, и Peter Gorman, Pythagoras, A Life (London: Routledge & Kegan Paul, 1979), стр. 32.].

Когда Фалес превратился в немощного старца, устрашенного бессилием собственного ума, он встретил самого важного предтечу Евклида – Пифагора Самосского. Самос был большим городом на одноименном острове в Эгейском море, неподалеку от Милета. Гости острова и по сей день могут обозреть разрушенные колонны и базальтовые руины театра, обращенного к древней гавани. Во дни Пифагора город цвел. Когда Пифагору было 18, умер его отец. Дядя дал ему сколько-то серебра и рекомендательное письмо и выслал с визитом к философу Ферекиду на соседний остров Лесбос, от названия которого происходит слово «лесбийский».

Согласно легенде, Ферекид изучал тайные книги финикийцев и принес грекам верование в бессмертие души и перерождение, а Пифагор сделал эти представления фундаментом своей религиозной философии. Пифагор и Ферекид подружились на всю жизнь, однако на Лесбосе Пифагор не остался. К своим двадцати годам он успел съездить в Милет, где и познакомился с Фалесом.

Вот вам историческая картина[29 - Gorman, стр. 40.]: юноша с длинными густыми волосами, облаченный не в традиционную греческую тунику, а в штаны – эдакий античный хиппи, – навещает знаменитого старца. Фалес к тому времени уже понимал, что его прежнее величие клонится к закату. Усмотрев в юноше, быть может, отблеск собственной молодости, он извинился за упадок своего разума.

Нам неведомо, что именно сказал Фалес Пифагору, однако известна сила его влияния на молодого гения. Годы спустя после смерти Фалеса Пифагор, сидя дома, время от времени запевал песни во славу усопшего провидца. Все античные свидетельства той встречи сходятся в одном: Фалес обратился к Пифагору с воззванием на манер Хорэса Грили, однако не на Запад отправил он молодого человека[30 - Хорэс Грили (1811–1872) – американский журналист и политик, социалист-утопист, прославился фразой в своей редакторской колонке, опубликованной 13 июля 1865 г.: «Ступайте на Запад, молодой человек, ступайте на Запад…» – Прим. пер.], а в Египет.

Глава 4. Тайное общество

Пифагор послушался советов Фалеса[31 - Наиболее полная биография Пифагора, со всеми ссылками, – гормановская. Также см.: Leslie Ralph, Pythagoras (London: Krikos, 1961).] и отправился в Египет, но в тамошней математике не обрел поэзии. Геометрические объекты были физическими сущностями. Линия оказалась веревкой, натянутой гарпедонаптом, или кромкой пашни. Прямоугольник – границами участка земли или поверхностью каменной плиты.

Пространство – илом, почвой и воздухом. Именно грекам, а не египтянам принадлежит романтическое, метафорическое представление математики: пространство может быть математической абстракцией и, что не менее важно, абстракция эта может быть применена в самых разных обстоятельствах. Иногда линия – это просто линия. Но в то же время линия может представлять и ребро пирамиды, и границу пашни, и путь вороны в небе. Знание об одном переносимо на другое.

По преданию, Пифагор шел как-то мимо кузни и услышал, как по тяжелой наковальне стучат разные молоты. Он задумался. Повозившись со струнами, он обнаружил гармонические последовательности, а также связь между длиной поющей струны и тоном слышимой музыкальной ноты. Струна вдвое длиннее, например, поет в два раза ниже. Наблюдение с виду простое, однако глубина его революционна – его часто считают первым в истории примером эмпирического открытия закона природы.

Миллионы лет назад некто выдавил из себя какое-нибудь мычание или хмыканье[32 - См.: Donald Johanson and Blake Edgar, From Lucy to Language (New York: Simon & Schuster, 1996), стр. 106–107.], а некто другой проговорил бессмертные слова – ныне утерянные, но наверняка означавшие что-то вроде «я понимаю, о чем ты». Так произошел язык. В науке учение Пифагора о гармонии – явление того же порядка, первый пример описания физического мира в математических терминах. Не будем забывать ни на секунду, что во времена Пифагора не существовало даже простейшей математики чисел. Пифагорейцам, к примеру, открытие того, что умножение сторон прямоугольника друг на друга дает площадь этого прямоугольника, показалось подлинным откровением.

Для Пифагора и его последователей главной интригой математики виделись разнообразные численные закономерности. Пифагорейцы представляли себе числа как камешки или точки, выложенные в определенный геометрический узор. Они обнаружили, что некоторые числа можно сложить, разместив камешки на равном расстоянии в два столбика по два, в три по три и т. д. – так, чтобы получался квадрат. Пифагорейцы называли любое количество камешков, которые можно выложить таким способом, «квадратным числом», поэтому и мы зовем их до сих пор квадратами: 4, 9, 16 и т. д. Другие числа, как выяснили пифагорейцы, можно выложить так, чтобы получались треугольники: 3, 6, 10 и т. д.

Свойства квадратных и треугольных чисел завораживали Пифагора. Например, второе квадратное число, 4, равно сумме первых двух нечетных чисел, 1 + 3. Третье квадратное число, 9, равно сумме первых трех нечетных чисел, 1 + 3 + 5, и т. д. (То же верно и для первого квадрата: 1 = 1.) Пифагор заметил и то, что, подобно равенству квадратных чисел сумме соответствующих предыдущих нечетных чисел, треугольные числа есть сумма всех последовательных чисел, четных и нечетных. Да и сами квадратные и треугольные числа взаимосвязаны: если сложить треугольное число с предыдущим или следующим треугольным, получится квадратное число.

Теорема Пифагора тоже наверняка показалась волшебством. Вообразите древних ученых, исследующих треугольники все сортов, а не одни лишь прямоугольные, измеряющих все углы и стороны, крутя их и сравнивая друг с другом. Случись такое исследование в наше время, университеты посвятили бы ему отдельный предмет.

«Мой сын устроился на математический факультет в Беркли, – говорила бы в таком случае какая-нибудь гордая мать. – Треугольники преподает». И вот однажды ее сынуля обнаруживает любопытную закономерность: в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон. Оказывается, это правило действует для больших треугольников, маленьких, толстых, коротких, одним словом – для любого прямоугольного треугольника из всех, какие когда-либо попадались под руку, однако не для любого треугольника вообще. Это открытие наверняка удостоилось бы заголовков в «Нью-Йорк Таймс»: «У прямоугольных треугольников обнаружена поразительная закономерность», – а ниже, помельче: «Практическую применимость предстоит установить еще не скоро».

Пифагоровы фигуры из камешков

Почему стороны прямоугольного треугольника обязаны всегда следовать настолько простому правилу? Теорему Пифагора можно доказать геометрическим умножением, которое любил применять сам Пифагор. Неизвестно, этим ли манером доказывал свою теорему ее создатель, однако способ вполне наглядный – потому что целиком геометрический. Сейчас-то существуют доказательства попроще – они полагаются на алгебру или даже тригонометрию, но ни той, ни другой во времена Пифагора не существовало. Но и геометрическое доказательство незатейливо: это лишь слегка вывихнутая математическая версия игры «соедини точки».

Для доказательства теоремы Пифагора геометрически потребуется знать всего один расчетный факт: площадь квадрата равна квадрату длины его стороны. Это просто-напросто современная формулировка Пифагоровой аналогии с камешками. Берем любой прямоугольный треугольник и строим на его сторонах по квадрату: один со сторонами, равными гипотенузе, и два – со сторонами, равными соответствующим длинам других сторон. Площадь каждого из этих трех квадратов есть квадрат длины соответствующей стороны треугольника. Если удастся доказать, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, это и будет доказательством теоремы Пифагора.

Чтобы все упростить, дадим сторонам треугольника имена. У гипотенузы оно уже есть, хоть и длинноватое, но пусть и останется, будем просто писать его с большой буквы – Гипотенуза, – чтобы точно понимать: речь идет об этой конкретной гипотенузе, а не вообще. А два катета назовем Алексеем и Николаем. Удивительное совпадение: именно так зовут двоих сыновей автора книги. На момент написания этой главы Алексей длиннее, а Николай – короче; договоримся учесть эту разницу при поименовании сторон треугольника (хотя доказательство прекрасно справляется и в случае с равными сторонами). Начнем с построения квадрата, длина каждой стороны которого равна сумме длин Алексея и Николая. Далее поставим на каждой стороне по точке, отделив таким образом сегмент длины Николая от Алексея, после чего соединим эти точки. Это можно проделать несколькими способами, но те два, которые интересны нам, обозначены на рисунке, стр. 43. В одном случае выйдет квадрат, чьи стороны равны Гипотенузе, и еще четыре треугольника-«обрезка». В другом получится два квадрата, чьи стороны равны Алексею и Николаю, а сверх того – два прямоугольника-обрезка, которые можно рассечь по диагонали и получить четыре треугольника, в точности равных тем, что у нас получились в обрезках в первом случае.

Остальное – дело счета. У двух построенных квадратов площади одинаковые, поэтому если выкинуть площади четырех треугольников-обрезков из обоих построений, оставшиеся площади недвижимости равны между собой. Однако в первом случае это квадрат со стороной, равной длине Гипотенузы, а во втором – это сумма двух квадратов с длинами сторон, равными Алексею и Николаю. Теорема доказана!

Под впечатлением от этого триумфа знания один из учеников Пифагора написал[33 - Jane Muir, Of Men and Numbers (New York: Dodd, Mead & Co., 1961), стр. 6.], что «не будь чисел и их природы, ничто существующее никому не было бы ясно». Пифагорейцы отразили основы своей философии в термине «математика» – от греческого «матема», т. е. «наука», «знание». Смысл слова отражает близкую связь понятий, хотя ныне существует четкое разграничение между математикой и наукой, но оно, как мы еще увидим, не было столь отчетливым вплоть до XIX века.

А еще есть разница между осмысленной речью и белибердой, однако пифагорейцы ее не всегда чувствовали. Трепет Пифагора перед взаимоотношениями чисел подтолкнул его к созданию множества мистических нумерологических верований.

Он первым разделил числа на четные и нечетные, но на этом не остановился: он одушевил их, разделив на «мужские» (нечетные) и «женские» (четные). Разные числа он соотносил с определенными понятиями: 1, например, связывал с разумом, 2 – с мнением, 4 – со справедливостью. Поскольку 4 в его системе представлял квадрат, его ассоциировали с правосудием – отсюда, в итоге, происходит современный оборот «square deal»[34 - Square deal (англ. букв.) – «квадратная сделка», употребляется в значении «справедливая, честная сделка». – Прим. пер.]. Отдавая Пифагору должное, следует признать, что нам отделить великое от вздорного легко – спустя каких-то пару тысяч лет.

Пифагор был фигурой харизматической и гением, но и в части саморекламы не подкачал. В Египте он не только постигал египетскую геометрию, но стал первым греком, изучившим египетские иероглифы, и в конце концов занял пост египетского жреца – ну или во всяком случае его посвятили в их ритуалы. Он получил доступ ко всем таинствам – и даже был вхож в секретные храмовые залы. Он провел в Египте не менее тринадцати лет. И покинул страну не по собственной воле – напали персы и взяли его в плен. Пифагор оказался в Вавилоне, где в итоге получил свободу – а заодно разобрался в вавилонской математике. В пятьдесят он в конце концов вернулся на Самос. К тому времени он уже развил философию пространства и математики, которую собирался проповедовать. Дело было за малым – за последователями.

Теорема Пифагора

Его знание иероглифов производило на многих греков впечатление, что Пифагор владеет особыми силами. Он поддерживал слухи, обособлявшие его от простых граждан. Из странного о Пифагоре говорили, например, что он как-то напал на ядовитую змею и искусал ее до смерти. А еще болтали, что как-то в дом Пифагора вломился вор и увидел такое, что сбежал с пустыми руками, однако рассказывать, что же он увидел, отказался[35 - Gorman, стр. 108.]. У Пифагора на бедре к тому же было «золотое» родимое пятно, которое он демонстрировал как знак своего божественного происхождения. Люди Самоса оказались не слишком падки на его проповеди, и Пифагор вскоре отбыл к людям попроще – в Кротон, итальянский город, колонизированный греками. Там-то он и основал «общество» своих последователей.

Жизнь Пифагора и легенда, которой она обросла, во многом похожи на таковые у другого харизматического лидера – Иисуса Христа. Трудно поверить, что мифы, рассказываемые о Пифагоре, никак не повлияли на создание кое-каких историй о Христе. К примеру, многие верили[36 - Gorman, стр. 19.], что Пифагор – сын божий, в его случае – Аполлона. Мать Пифагора звали Парфенисой, что означает «девственница». До отъезда в Египет Пифагор вел отшельническую жизнь на горе Кармель – подобно нагорным бдениям Христа. Еврейская секта ессеев приняла этот миф и, говорят, позднее имела связи с Иоанном Крестителем. Бытует также легенда о том, что Пифагор восставал из мертвых, хотя, согласно этой истории, Пифагор имитировал собственную смерть, спрятавшись в тайном подземелье. Многие волшебные силы Христа и его чудеса сначала приписывали Пифагору: поговаривали, что он может быть в двух местах одновременно, умеет успокаивать шторм на море и повелевать ветрами, и к нему однажды обратился божественный глас. Кроме того, считалось, что он умеет ходить по воде[37 - Gorman, стр. 110.].

Пифагорейская философия к тому же имела кое-что общее с Христовой. К примеру, Пифагор проповедовал, что надо любить врагов своих. Однако в философском отношении он был ближе к своему современнику, Сиддхартхе Гаутаме Будде (ок. 560–480 гг. до н. э.). Оба верили в перерождение[38 - Gorman, стр. 111.], возможно – в теле животного, а значит, в животном могла находиться душа, прежде бывшая человеческой. Исходя из этого оба считали любую жизнь ценной и противо стояли традиционным для того времени животным жертвоприношениям, а также проповедовали строгое вегетарианство. Рассказывали, что Пифагор как-то вмешался в избиение собаки, сказав мучившему животное человеку, что он-де узнал в псе своего старого друга – перерожденного в собачьем теле[39 - Gorman, стр. 111.].

Пифагор считал, что владение вещами мешает достижению божественных истин. Греки в те времена носили шерсть, а вещи склонны были красить в разные цвета. Состоятельный человек мог время от времени набросить мантию, на манер плаща, на плечи, застегнув ее золотой булавкой или брошью – с гордостью демонстрируя свое богатство. Пифагор отказывался от роскоши и запрещал своим последователям носить какую бы то ни было одежду, кроме простого белого льна. Денег они не зарабатывали – полагались на благотворительность кротонцев и, возможно, на средства некоторых учеников, поскольку вся собственность была собрана воедино, и все жили общинно. Устройство самой этой организации установить затруднительно, поскольку привычками и нравами люди того времени совсем не походили на нас. Например, пифагорейская братия отличала себя от обычных людей тем, что не мочилась на публике и не занималась сексом на виду у всех[40 - Gorman, стр. 123.].

Скрытность играла важную роль в пифагорейском сообществе – вероятно, благодаря опыту Пифагора в тайных практиках египетского жречества. А может, из нежелания навлекать неприятности, которые могли возникнуть, узнай общественность о революционных идеях пифагорейцев. Одно из открытий Пифагора обросло такой таинственностью, что, согласно легенде, разглашение его было запрещено под страхом смерти.

Вспомним задачу определения длины диагонали в квадрате со стороной в единицу. Вавилоняне рассчитали это значение с точностью до шести десятичных знаков, но пифагорейцам этого показалось мало. Они пожелали знать точное значение. Как можно делать вид, что знаешь хоть что-нибудь о пространстве внутри квадрата, если не знаешь даже такого? Трудность, однако, состояла в том, что это значение пифагорейцы получали все с большей точностью, но ни одно полученное число не было исчерпывающим ответом. Но пифагорейцев так просто не смутишь. Им хватило фантазии задаться вопросом: а существует ли вообще такое число? Они заключили, что нет, – и им хватило одаренности доказать это.

Сейчас-то мы знаем, что длина этой диагонали равна квадратному корню из двух – иррациональному числу. Это означает, что его нельзя записать в десятичном виде с конечным количеством знаков после запятой и также его нельзя записать в виде целого числа или дроби, а пифагорейцам были известны лишь такие числа. Их доказательство несуществования этого числа на самом деле равносильно тому, что это число нельзя записать в виде дроби.

Пифагор со всей очевидностью преткнулся. То, что длина диагонали квадрата[41 - Для интересующихся математикой приведем доказательство. Обозначим длину диагонали как c и начнем с допущения, что c можно выразить в виде дроби – скажем, m/n, в которой у m и n нет общих делителей, и они ни в коем случае не четные одновременно. Доказательство производится в три этапа. Первый: заметим, если c

= 2, значит, m

= 2n

. Словами: m

– четное число. Поскольку квадраты нечетных чисел – нечетные, значит, и m само по себе должно быть четным. Второй: поскольку m иn не могут быть оба четными, значит, n должно быть нечетным. Третий: взглянем на уравнение m

= 2n

с другой стороны. Поскольку m – четное, его можно записать как 2q, при любом q. Если заменить m в m

= 2n

на 2q, получим 4q

= 2n

, что то же самое, что и 2q

= n

. Это означает, что n

, а следовательно, и n – четное.Мы только что доказали, что если c можно записать как c = m/n, то m есть нечетное, а n – четное. Получается противоречие, а значит, исходное допущение, что c можно записать как c = m/n, – ложное. Такого рода доказательства, когда мы допускаем отрицание того, что стремимся доказать, а потом показываем, что отрицание ведет к противоречию, называется reductio ad absurdum. Это одно из изобретений пифагорейцев, и поныне полезное для математики.] не может быть выражена ни в каком виде, провидцу, проповедующему, что числа – всё, было совсем не с руки. Что же теперь: менять философию? Дескать, числа – всё, кроме некоторых геометрических величин, которые нам кажутся совсем уж загадочными?

Соверши Пифагор простую вещь: назови он диагональ как-нибудь особо, например d, или еще того лучше – ?2 и сочти ее некой новой разновидностью числа, нашему гению удалось бы ускорить создание системы действительных чисел на много веков. Предприми Пифагор этот шаг, он предвосхитил бы революцию декартовых координат, поскольку за отсутствием численной записи необходимость как-то описать этот новый вид числа недвусмысленно подсказывала изобретение числовой оси. Однако вместо всего этого Пифагор отошел от своей весьма перспективной практики ассоциировать геометрические фигуры с числами и заявил, что некоторые длины не могут быть выражены через числа. Пифагорейцы назвали такие длины алогонами, «неразумными», ныне мы называем их иррациональными. У слова «алогон» – двойной смысл: оно к тому же еще и означает «непроизносимое». Пифагор предложил решить возникшую в его философии дилемму так, что полученное решение было затруднительно отстаивать, и поэтому, в соответствии с общей доктриной скрытности, он запретил своим последователям[42 - Muir, стр. 12–13.] раскрывать неловкий парадокс. В наши дни людей убивают много за что – из-за любви, политики, денег, религии, но не потому, что кто-то разболтал что-то о квадратном корне из двух. Для пифагорейцев же математика была религией, и поэтому когда Гиппас нарушил обет молчания, его убили.

Сопротивление иррациональному продолжалось еще тысячи лет. В конце XIX века, когда одаренный немецкий математик Георг Кантор создал революционный труд, в котором попытался как-то укоренить эти числа, его бывший наставник, хрыч по имени Леопольд Кронекер, «возражавший» против иррациональных чисел, категорически не согласился с Кантором и потом всю жизнь ставил ему палки в колеса. Кантор, не в силах вынести подобное, пережил нервный срыв[43 - Kramer, стр. 577.] и провел последние дни жизни в клинике для душевнобольных.

Пифагор тоже кончил не лучшим образом. Около 510 года до н. э. кто-то из пифагорейцев отправился в Сибарис – судя по всему, в поисках новых последователей. Сведений о том их странствии сохранилось мало; известно только, что всех убили. Позднее несколько сибаритов сбежало в Кротон от тирана Телиса, который незадолго до этого захватил власть в городе. Телис потребовал их выдачи. И тут Пифагор нарушил одно из своих главных правил: не вмешиваться в политику. Он уговорил кротонцев не выдавать беглецов. Разразилась война, Кротон победил, но Пифагору был нанесен непоправимый урон: у него завелись политические враги. Около 500 года до н. э. они атаковали пифагорейцев. Пифагор сбежал. Что с ним произошло дальше, не ясно: большинство источников утверждает, что он покончил с собой; однако есть и свидетельства того, что он тихо дожил остаток своих дней и умер почти столетним.

Пифагорейское общество просуществовало еще какое-то время после той травли – до следующей, случившейся примерно в 460 году до н. э., и в результате погибли практически все, за исключением нескольких последователей. Его учение дотянуло до 300-х годов до н. э. Воскресили его римляне – в первом веке до Р. Х., и оно стало главенствующей силой расцветающей Римской империи. Пифагорейство повлияло на многие религии того времени – александрийский иудаизм, например, дряхлеющие египетские верования и, как мы уже убедились, христианство. Во II веке н. э. пифагорейская математика вкупе со школой Платона получила новый толчок к развитию. Интеллектуальных потомков Пифагора в IV веке опять раздавила власть – восточно-римский император Юстиниан. Римляне терпеть не могли длинные волосы[44 - Gorman, стр 192–193.] и бороды греческих потомков философии Пифагора, а также их пристрастие к наркотикам вроде опия, не говоря уже об их нехристианских верованиях. Юстиниан закрыл академию и запретил преподавание философии. Пифагорейство еще померцало пару столетий, после чего растворилось в Темных веках примерно в VI веке н. э.

Конец ознакомительного фрагмента.

notes

Примечания

1

О равнодушии вавилонян к знанию ирландский поэт и драматург Уильям Батлер Йейтс (1865–1939) написал в своем стихотворении «Заря», начинающемся так:

Я был бы невеждой, как та заря,

Что сверху вниз глядела, зря,

Как меряет город жена царя

Иглой от броши своей,

Иль на дряблых людей, что взирали

Из мелочного Вавилона

На беспечность планет и пути их

И таянье звезд от взошедшей луны,

А сами в скрижали суммы писали…

Здесь и далее прим. автора, кроме оговоренных особо.

2

Michael Williams, A History of Computing Technology (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985), стр. 39–40.

3

Интересно о происхождении счета и арифметики у Уильямза, гл. 1.

4

Williams, стр. 3.

5

R. G. W. Anderson, The British Museum (London: British Museum Press, 1997), стр. 16.

6

Pierre Montet, Eternal Egypt, trans. Doreen Weightman (New York: New American Library, 1964), стр. 1–8.

7

Alfred Hooper, Makers of Mathematics (New York: Random House, 1948), стр. 32.

8

Georges Jean, Writing: The Story of Alphabets and Scripts, trans. Jenny Oates (New York: Harry N. Abrams, 1992), стр. 27.

9

Геродот писал, что развитие египетской геометрии стимулировали задачи налогообложения. См.: W. K. C. Guthrie, A History of Greek Phulosophy (Cambridge, UK: University Press, 1971), стр. 34–35, и Herbert Turnbull, The Great Mathematicians (New York: New York University Press, 1961), стр. 1.

10

Rosalie David, Handbook of Life in Ancient Egypt (New York: Facts on File, 1998), стр. 96.

11

Эти и другие поразительные факты можно найти благодаря вкладу Алексея в эти примечания – вот где: James Putnam and Jeremy Pemberton, Amazing Facts about Ancient Egypt (London and New York: Thames & Hudson, 1995), стр. 46.

12

Хороший обзор вавилонской и шумерской математики см.: Edna E. Kramer, The Nature and Growth of Modern Mathematics (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1981), стр. 2–12.

13

Для сравнения египетской и вавилонской математик см.: Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (New York: Oxford University Press, 1972), стр. 11–22. См. Также: H. L. Resnikoff and R. O. Wells, Jr., Mathematics in Civilization (New York: Dover Publications, 1973), стр. 69–89.

14

Также известен как «папирус Ахмеса»; Александр Генри Ринд (Райнд, 1833–1863) – шотландский юрист и египтолог. – Прим. пер.

15

Resnikoff and Wells, стр. 69.

16

Kline, стр. 11.

17

Цит. по: The First Mathematicians (март, 2000); сходная, но более сложная риторическая задача есть у Клайна, стр. 9.

18

Kline, стр. 259.

19

О жизни и работе Фалеса см.: Sir Thomas Heath, A History of Greek Mathematics (New York: Dover Publications, 1981), стр. 118–149; Jonathan Barnes, The Presocratic Philosophers (London: Routledge & Kegan Paul, 1982), стр. 1–16; George Johnston Allman, Greek Geometry from Thales to Euclid (Dublin, 1889), стр. 7–17; G. S. Kirk and J. E. Raven, The Presocratic Philosophers (Cambridge, UK: University Press, 1957), стр. 74–98; Hooper, стр. 27–38; Guthrie, стр. 39–71.

20

Meander (англ.) – изгиб, извилина, излучина, поворот. – Прим. пер.

21

Reay Tannahill, Sex in History (Scarborough House, 1992), стр. 98–99.

22

Richard Hibler, Life and Learning in Ancient Athens (Lanham, MD: University Press of America, 1988), стр. 21.

23

28 мая 585 года до н. э. по современному летоисчислению; битва между лидийцами и мидянами. – Прим. пер.

24

Hooper, стр. 37.

25

Erwin Schroedinger, Nature and the Greeks (Cambridge: Cambridge University Press, 1996), стр. 81.

26

Hooper, стр. 33.

27

О милетской жизни см.: Adelaide Dunham, The History of Miletus (London: University of London Press, 1915).

28

См.: Guthrie, стр. 55–80, и Peter Gorman, Pythagoras, A Life (London: Routledge & Kegan Paul, 1979), стр. 32.

29

Gorman, стр. 40.

30

Хорэс Грили (1811–1872) – американский журналист и политик, социалист-утопист, прославился фразой в своей редакторской колонке, опубликованной 13 июля 1865 г.: «Ступайте на Запад, молодой человек, ступайте на Запад…» – Прим. пер.

31

Наиболее полная биография Пифагора, со всеми ссылками, – гормановская. Также см.: Leslie Ralph, Pythagoras (London: Krikos, 1961).

32

См.: Donald Johanson and Blake Edgar, From Lucy to Language (New York: Simon & Schuster, 1996), стр. 106–107.

33

Jane Muir, Of Men and Numbers (New York: Dodd, Mead & Co., 1961), стр. 6.

34

Square deal (англ. букв.) – «квадратная сделка», употребляется в значении «справедливая, честная сделка». – Прим. пер.

35

Gorman, стр. 108.

36

Gorman, стр. 19.

37

Gorman, стр. 110.

38

Gorman, стр. 111.

39

Gorman, стр. 111.

40

Gorman, стр. 123.

41

Для интересующихся математикой приведем доказательство. Обозначим длину диагонали как c и начнем с допущения, что c можно выразить в виде дроби – скажем, m/n, в которой у m и n нет общих делителей, и они ни в коем случае не четные одновременно. Доказательство производится в три этапа. Первый:

заметим, если c

= 2, значит, m

= 2n

. Словами: m

– четное число. Поскольку квадраты нечетных чисел – нечетные, значит, и m само по себе должно быть четным. Второй: поскольку m иn не могут быть оба четными, значит, n должно быть нечетным. Третий: взглянем на уравнение m

= 2n

с другой стороны. Поскольку m – четное, его можно записать как 2q, при любом q. Если заменить m в m

= 2n

на 2q, получим 4q

= 2n

, что то же самое, что и 2q

= n

. Это означает, что n

, а следовательно, и n – четное.

Мы только что доказали, что если c можно записать как c = m/n, то m есть нечетное, а n – четное. Получается противоречие, а значит, исходное допущение, что c можно записать как c = m/n, – ложное. Такого рода доказательства, когда мы допускаем отрицание того, что стремимся доказать, а потом показываем, что отрицание ведет к противоречию, называется reductio ad absurdum. Это одно из изобретений пифагорейцев, и поныне полезное для математики.

42

Muir, стр. 12–13.

43

Kramer, стр. 577.

44

Gorman, стр 192–193.

надано